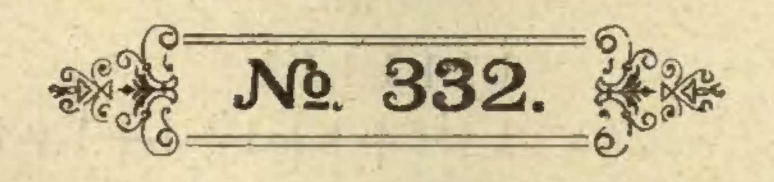
XXVIII Сем. № 8.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.

31 Октября  1902 г.

Памяти А. И. Гольденберга.

„Нѣтъ предмета болѣе сухого и трезваго, чѣмъ ариѳметика, и именно въ этомъ предметѣ, какъ это ни странно, педагоги предавались мечтаніямъ и оргіямъ самымъ безумнымъ, самымъ непозволительнымъ", — такъ выражается одинъ изъ нѣмецкихъ авторовъ *Книллингъ* по поводу системы обученія ариѳметикѣ, основанной на идеяхъ *Песталоцци* и *Груббе*.

Въ виду свѣжей могилы А. И. Гольденберга *), надо вспомнить объ этихъ оргіяхъ, потому что А. И. былъ самымъ энергическимъ борцомъ противъ нихъ и изъ борьбы вышелъ побѣдителемъ. Правда, что въ Россіи груббеизмъ никогда не выливался въ такую уродливую форму, какъ у нѣмцевъ, но однако же было весьма неблагополучно и у насъ: и мы „созерцали" числа, и мы занимались „монографическимъ ихъ изученіемъ".

Взгляды на цѣли обученія ариѳметикѣ были очень смутны и сбивчивы. Надо было не только ясно опредѣлить эти цѣли, но и указать практическіе пути для ихъ осуществленія. Это и сдѣлалъ А. И. Гольденбергъ.

„Обученіе дѣтей счисленію", говоритъ онъ: „имѣетъ цѣлью научить ихъ производить *сознательно* дѣйствія надъ числами и развить въ дѣтяхъ навыкъ прилагать эти дѣйствія къ рѣшенію задачъ общежитейскаго содержанія". Эта формулировка пред-

*) О кончинѣ А. И. Гольденберга было сообщено въ № 324 „Вѣстника".

ставляется столь очевидною и простою, что можетъ явиться даже вопросъ—да развѣ возможна другая? А вотъ что говоритъ *Груббе:*

„Въ основаніе обученія счисленію должно быть положено не обученіе производству дѣйствій, а изученіе самихъ чиселъ путемъ опыта, наблюденія, путемъ *созерцанія*".

Чтобы иллюстрировать сущность этого взгляда, я приведу схему изученія числа семь по методѣ Груббе.

Семь.

1	1 1 1 1 1 1 1
1	1+1+1+1+1+1+1=7
1	7×1=7
1	7—1—1—1—1—1—1=1
1	7 : 1=7
2	2+2+2+1=7
2	3×2+1=7
2	7—2—2—2=1
1	7 : 2=3 (1)
3	3+3+1=7
3	2×3+1=7
	7—3—3=1
1	7 : 3=2 (1)
	4+3=7; 3+4=7
4	1×4+3=7
	7—4=3; 7—3=4
3	7 : 4=1 (3)
	5+2=7; 2+5=7
5	1×5+2=7
	7—5=2
2	7 : 5=1 (2)
	6+1=7; 1+6=7
6	1×6+1=7
	7—6=1
1	6 : 7=1 (1).

Комментировать эту схему излишне: она говоритъ сама за себя.

Итакъ, Гольденбергъ даетъ правильную и, казалось бы,

единственно-возможную формулировку задачи обученія начальной ариѳметикѣ. Затѣмъ, для практическаго осуществленія намѣченной цѣли, онъ составляетъ, во-первыхъ, методику начальной ариѳметики и, во-вторыхъ, задачники, т. е. все, что нужно для начальнаго обученія ариѳметикѣ, потому что объ учебникахъ здѣсь, конечно, не можетъ быть и рѣчи. Книги эти получили широкое распространеніе,—можно сказать, что почти вся грамотная Россія училась по Гольденбергу. Методика выдержала 12 изданій, а задачники 32. Интересно, что двѣнадцатое изданіе методики перепечатано безъ перемѣнъ со второго, а 32-е изданіе задачника тоже безъ перемѣнъ съ 3-го. А между тѣмъ, покойный А. И. постоянно работалъ надъ своими книгами, сознавалъ нѣкоторые ихъ недостатки и страстно желалъ ихъ исправить, но не могъ этого сдѣлать по обстоятельствамъ, отъ него независящимъ. Еще одно замѣчаніе по поводу книгъ Гольденберга: казалось бы, что авторъ столь распространенныхъ изданій долженъ быть если не богатымъ, то, по крайней мѣрѣ, обезпеченнымъ человѣкомъ, а А. И. всю жизнь бѣгалъ по урокамъ, постоянно нуждался въ копейкахъ и велъ жизнь учителя—пролетарія.

Я не имѣю намѣренія входить здѣсь въ критическій разборъ книгъ Гольденберга, тѣмъ болѣе, что это давно уже сдѣлано,—могу только сказать, что самое бѣглое знакомство съ ними убѣждаетъ въ томъ, что это была работа не коммерческаго характера, а трудъ просвѣщеннаго педагога, безконечно преданнаго своему дѣлу. Въ этой области заслуги А. И. безспорны, общепризнанны и велики. Онъ сдѣлалъ большое дѣло для народной школы и не остановился на немъ. Постоянно работая въ разныхъ періодическихъ изданіяхъ, участвуя въ съѣздахъ учителей, руководя курсами, Гольденбергъ до послѣдняго вздоха работалъ для народной школы и, даже умирая, въ бреду, давалъ дѣтямъ урокъ счисленія.

Что касается дѣятельности Гольденберга въ области средней школы, то, хотя она не имѣетъ такого систематическаго характера, какъ только что разсмотрѣнная, тѣмъ не менѣе, она весьма значительна и существенна. Отмѣтимъ прежде всего, что Гольденбергъ былъ первымъ (если не ошибаюсь) въ Россіи издателемъ, редакторомъ и авторомъ журнала, посвященнаго элементарной математикѣ. Говорю—авторомъ,—потому что всѣ статьи журнала, за весьма небольшими исключеніями, были составлены А—мъ Ивановичемъ. Журналъ этотъ велся до такой степени интересно и содержательно, что теперь возникаетъ мысль переиздать его въ формѣ математической хрестоматіи, мысль, по моему мнѣнію, очень счастливая, потому что чтеніе такой хрестоматіи будетъ въ высшей степени способствовать завершенію элементарнаго математическаго образованія юношей. Кромѣ того, Гольденбергъ перевелъ и издалъ мало-оцѣненный у насъ учебникъ геометріи *Руше и Комберусса*, въ учебно вос—ой библіотекѣ далъ обзоръ русской учебной литературы по математикѣ, соста-

вилъ очень хорошіе задачники по ариѳметикѣ для приготовительнаго, 1-го и 2-го классовъ ср. учебныхъ заведеній, постоянно сотрудничалъ въ „Педагогическомъ сборникѣ“, въ „Семьѣ и Школѣ“, въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, участвовалъ въ выработкѣ программъ для среднихъ учебныхъ заведеній, въ разныхъ коммиссіяхъ и пр.

Но этимъ еще далеко не исчерпывается его дѣятельность, имѣвшая свою особую, своеобразную сторону. Широко-образованный человѣкъ, страстный любитель элементарной математики, педагогъ по призванію, А. И. съ неослабѣвающимъ интересомъ слѣдилъ за всѣми теченіями мысли въ области учебно-математической; и смѣло можно сказать. что не было въ этой сферѣ такого оттѣнка, съ которымъ онъ не былъ бы знакомъ. Его маленькая квартирка изъ 3-хъ комнатъ на Николаевской вся была заставлена книжными шкафами, завалена иностранными и русскими журналами, и тутъ постоянно велись горячія пренія по разнымъ математическимъ и педагогическимъ вопросамъ. Кто изъ учителей не бывалъ у А. И., кто не восхищался этой распространенной у него атмосферой серьезныхъ умственныхъ интересовъ?! Одинъ приходилъ за совѣтомъ и помощью, другой приносилъ свои скорби и разочарованія, третій наводилъ справку, просилъ книгу, приносилъ интересную задачу, — и на все откликался незабвенный А. И. Ничья просьба не оставалась безъ результата; А. И. и хлопоталъ за многихъ и помогалъ многимъ и, среди неотложной работы, рылся въ шкафахъ, исполняя чьи-нибудь желанія, и по цѣлымъ часамъ просиживалъ за какой-нибудь головоломной задачей....

Онъ былъ живой человѣкъ, добрый, душевный, сердечный, отзывчивый.

Окончивъ два высшихъ учебныхъ заведенія (университетъ и арт. академію), обладая большими связями, А. И. могъ бы сдѣлать блестящую карьеру; а между тѣмъ онъ остался скромнымъ учителемъ, всю жизнь бьющимся изъ-за куска хлѣба.

За нѣсколько дней до смерти, видя горе жены, онъ сказалъ ей: „Не нужно волноваться,—все идетъ естественнымъ путемъ. Прожилъ я хорошо, благодарю тебя. Жилъ я людямъ не на позоръ, обществу на пользу, жалѣю только, что не окончилъ своихъ трудовъ“.

Въ моихъ рукахъ цѣлая серія писемъ къ женѣ А. И. по поводу его смерти. Письма эти отъ людей самыхъ разнообразныхъ профессій и общественныхъ положеній ярко свидѣтельствуютъ о высокой оцѣнкѣ заслугъ Гольденберга и о тѣхъ горячихъ симпатіяхъ, которыя возбуждалъ онъ во всѣхъ приходившихъ съ нимъ въ соприкосновеніе.

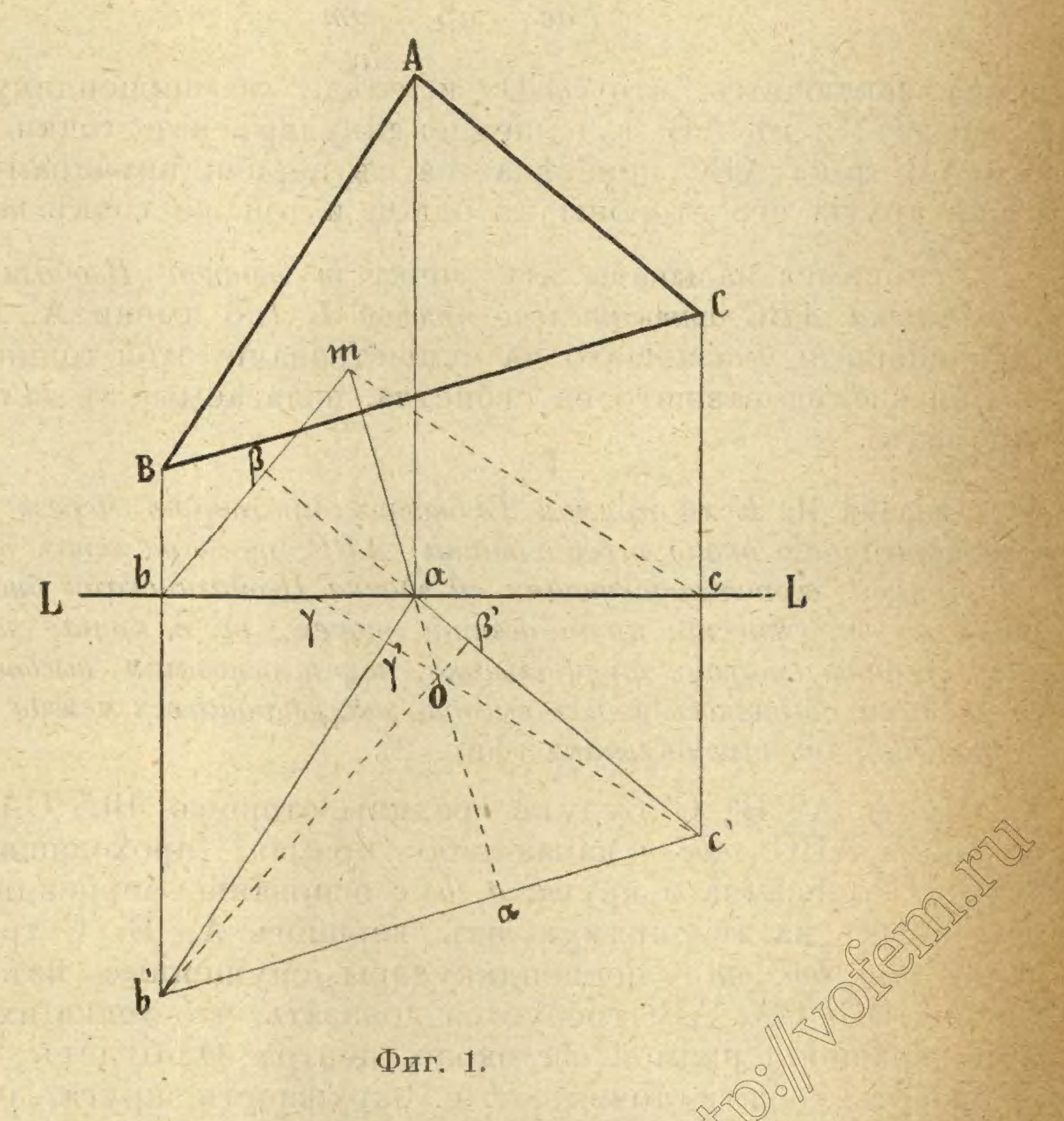
М. Попруженко.

Новая замѣчательная точка треугольника.

П. Фалѣева.

Теорема I. *Если изъ вершинъ треугольника* ABC *опустимъ перпендикуляры* Aa, Bb, Cc *на произвольную прямую* L, *лежащую въ плоскости треугольника, и изъ основанiй* a, b, c *этихъ перпендикуляровъ вновь опустимъ перпендикуляры на стороны* BC, CA, AB, *то эти послѣднiе перпендикуляры пересѣкутся въ одной точкѣ* (см. фиг. 1).

Пусть m будетъ точка пересѣченiя перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ a и b на стороны BC и CA тр-ка ABC; проведемъ черезъ одну изъ нихъ, напр. черезъ a, прямую ab', па-



Фиг. 1.

раллельную AB, до пересѣченiя съ перпендикуляромъ Bb въ точкѣ b', затѣмъ изъ b' прямую $b'c'$, параллельную BC, до пересѣченiя съ перпендикуляромъ Cc въ точкѣ c' и, наконецъ, соединимъ c' съ a; очевидно, что $c'a$ будетъ тоже параллельна CA, такъ какъ отрѣзки Cc' и Aa равны и параллельны. Пусть am и bm встрѣчаютъ прямыя $b'c'$ и $c'a$ въ точкахъ α и β. Такъ какъ $a\alpha$ перпендику-

лярна къ BC, то она будетъ перпендикулярна и къ $b'c'$, которая параллельна BC, и слѣдовательно, $a\alpha$ будетъ высотой тр-ка $ab'c'$; проведя двѣ другія его высоты $b'\beta'$ и $c'\gamma'$, мы увидимъ, что онѣ пересѣкутся съ $a\alpha$ въ одной и той же точкѣ O (ортоцентръ тр-ка $ab'c'$); и если означимъ пересѣченіе высоты $c'\gamma'$ съ прямой ab чрезъ γ, то будемъ имѣть: ($\Delta a\gamma\gamma' \backsim \Delta ab'b$ и $\Delta ab'\beta' \backsim \Delta ac'\gamma'$).

$$a\gamma . ab = a\gamma' . ab' \text{ и } a\gamma' . ab' = a\beta' . ac'$$

и, слѣдовательно,

$$a\gamma . ab = a\beta' . ac'.$$

Съ другой стороны, $ac . ab = a\beta . ac'$; раздѣляя два послѣднихъ равенства другъ на друга, найдемъ:

$$\frac{a\gamma}{ac} = \frac{a\beta'}{a\beta} = \frac{aO}{am};$$

откуда заключимъ, что $cm \| O\gamma$ и, слѣд., cm перпендикулярна къ ab', а слѣд., и къ AB; т. е., перпендикуляръ изъ точки c на сторону AB тр-ка ABC пересѣкается съ перпендикулярами am и bm на двѣ другія его стороны въ одной и той же точкѣ m.

Условимся называть эту точку *m точкой Цвойдзинскаго для треугольника ABC относительно прямой L* (по имени А. Цвойдзинскаго, впервые указавшаго на существованіе этой точки и аналитически изслѣдовавшаго ея свойства, излагаемыя въ дальнѣйшихъ теоремахъ).

Теорема II. *Если прямая L будетъ проходить черезъ центръ O круга, описаннаго около треугольника ABC, то, при всѣхъ положеніяхъ этой прямой, соотвѣтствующая ей точка Цвойдзинскаго будетъ находиться на окружности круга девяти точекъ, т. е. круга, проходящаго черезъ средины сторонъ треугольника, черезъ основанія высотъ его и черезъ средины отрѣзковъ этихъ высотъ, заключающихся между вершинами и ортоцентромъ треугольника* (фиг. 2).

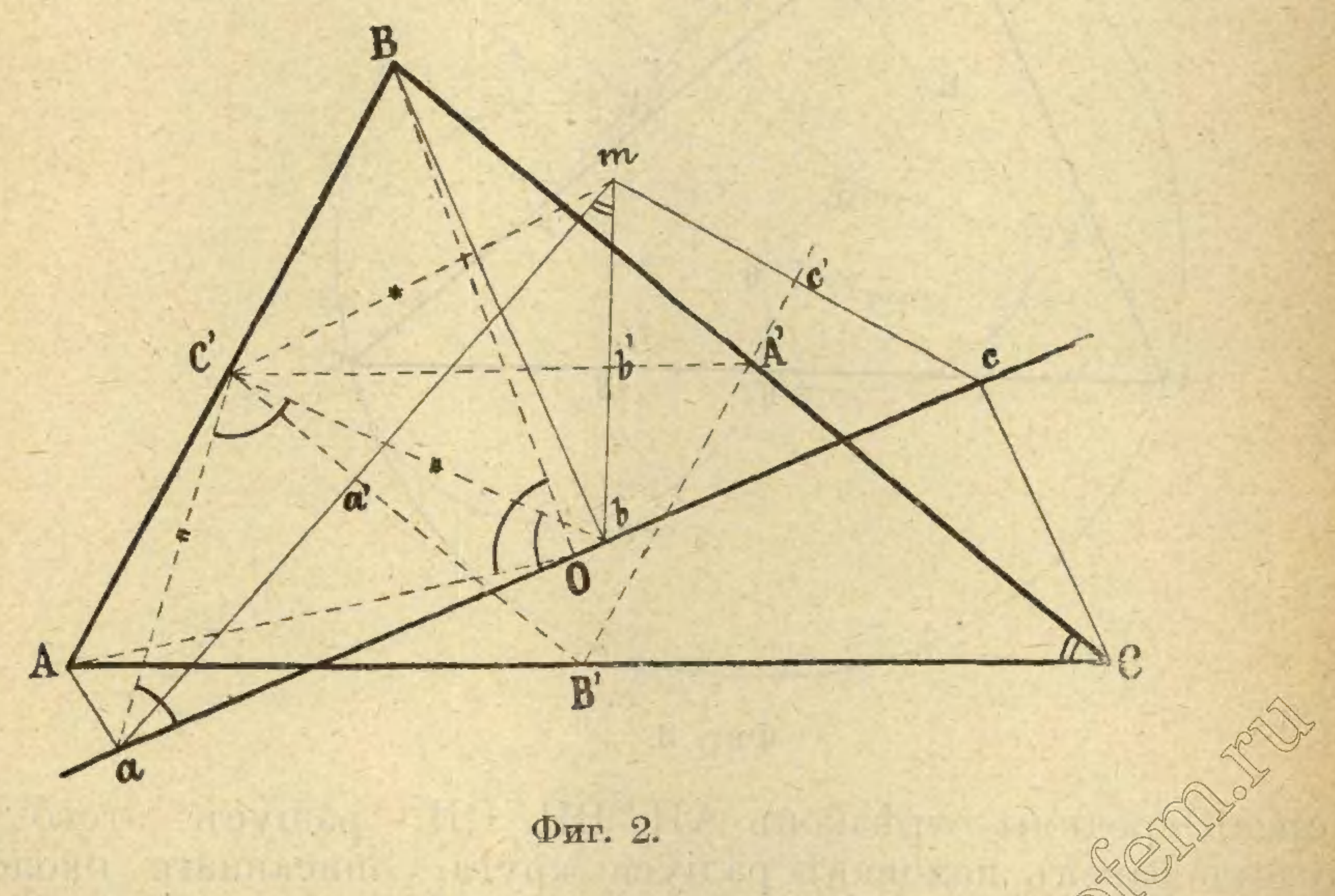
Пусть A′, B′, C′ будутъ средины сторонъ BC, CA, AB треугольника ABC, abc — какая-либо прямая, проходящая черезъ центръ O описаннаго круга; a, b, c основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на эту прямую изъ вершинъ A, B, C тр-ка; и, наконецъ, am, bm, cm — перпендикуляры, опущенные изъ a, b, c на стороны BC, CA, AB; требуется доказать, что точка ихъ встрѣчи m при вращеніи прямой abc около центра O будетъ описывать окружность девяти точекъ, т. е. окружность круга, описаннаго около треугольника A′B′C′.

Означимъ черезъ a', b', c' точки пересѣченія перпендикуляровъ am, bm, cm со сторонами B′C′, C′A′, A′B′ тр-ка A′B′C′. Проведя C′a, C′b и замѣтивъ, что точки A, O, C′ и a лежатъ на окружности, описанной на AO, какъ на діаметрѣ, такъ какъ углы AaO и AC′O суть прямые, мы заключаемъ, что $\angle$C′aO$=\angle$C′AO.

Точно также и $\angle C'bO = \angle C'BO$, ибо точки B, O, C′ и b лежатъ на окружности, описанной на BO, какъ на діаметрѣ. Но такъ какъ тр-къ AOB равнобедренный и въ немъ $\angle C'AO = \angle C'BO$, то слѣд., и $\angle C'aO = \angle C'bO$, и посему тр-къ $C'ab$ равнобедренный и подобный тр-ку AOB, и слѣд. $\angle aC'b = \angle AOB$. Съ другой стороны, видимъ, что $\angle amb = \angle ACB$, какъ углы съ перпендикулярными сторонами; и такъ какъ $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$, то и $\angle amb = \frac{1}{2} \angle aC'b$; а посему точки m, a и b лежатъ на окружности, описанной около C′, какъ около центра, и слѣд., $C'm = C'a = C'b$, а посему, такъ какъ am перпендикулярна къ $C'B'$ и bm перпендикулярна къ $C'A'$, то a' есть средина ma и b' есть средина mb, и слѣд., $a'b' \| ab$.

Такимъ же образомъ докажемъ, что и $b'c' \| bc$; а отсюда заключимъ, что точки a', b', c' лежатъ на одной прямой (параллельной abc).

Итакъ, основанія a', b', c' перпендикуляровъ изъ точки m на стороны тр-ка $A'B'C'$ при всѣхъ положеніяхъ точки m, со-



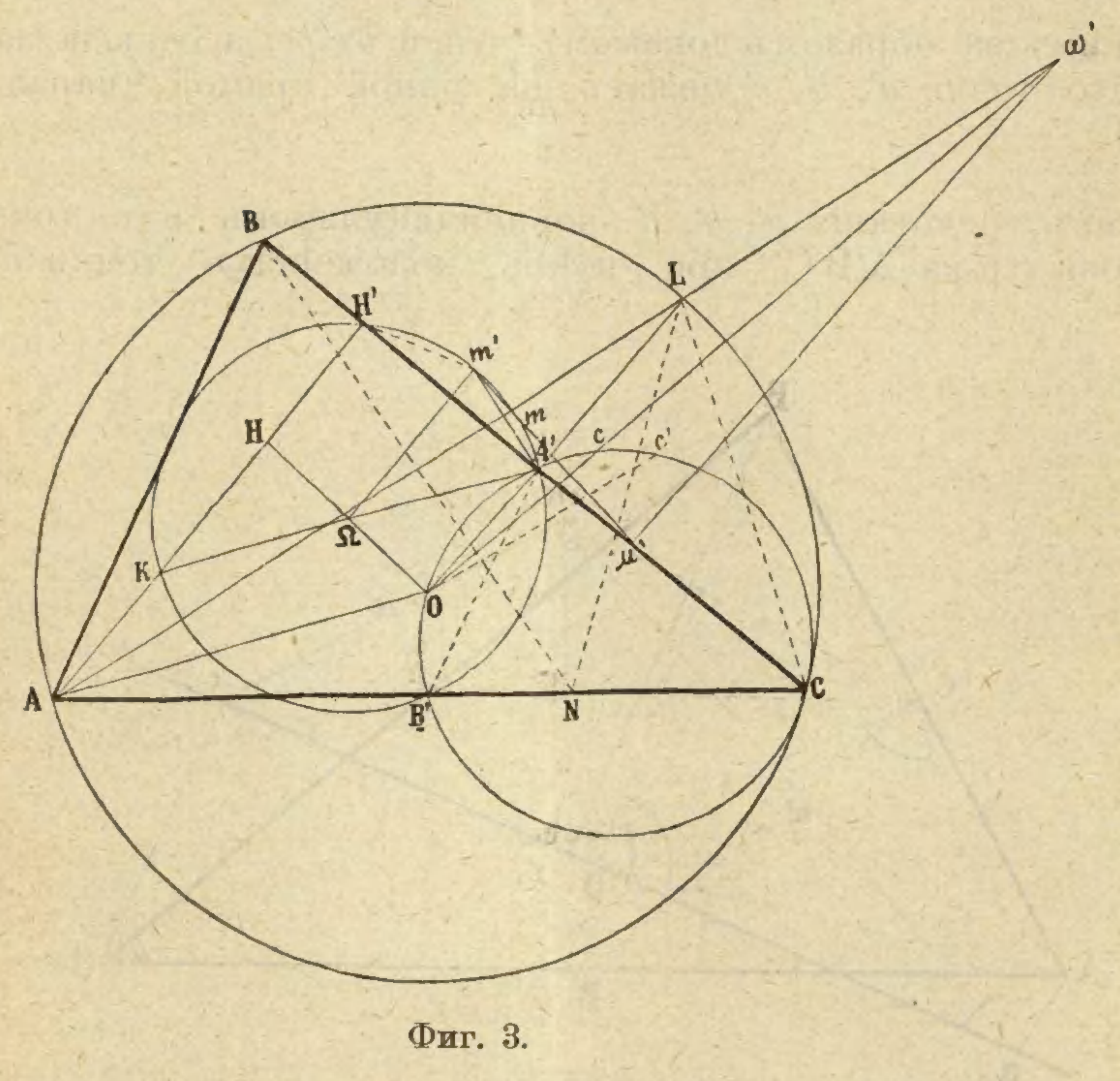
Фиг. 2.

отвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ прямой abc, проходящей черезъ центръ O, лежатъ на одной прямой; а посему, по извѣстной теоремѣ, заключаемъ, что мѣсто точки m есть окружность, описанная около тр-ка $A'B'C'$, т. е. окружность круга девяти точекъ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что точки m и a симметричны относительно $B'C'$, точки m и b симметричны относительно $C'A'$ и точки m и c симметричны относительно $A'B'$.

Теорема III. *Точка Цвойдзинскаго относительно прямой, соединяющей центръ описаннаго круга съ центромъ одной изъ внѣвписанныхъ окружностей, совпадаетъ съ точкой касанія этой послѣдней окружности съ окружностью девяти точекъ* (фиг. 3).

Пусть A′ будетъ средина стороны BC треугольника ABC, H′—подошва высоты его, соотвѣтствующей той же сторонѣ, причемъ, если примемъ, что AB меньше AC, то H′ будетъ падать между A′ и B. Пусть H будетъ ортоцентръ тр-ка, O — центръ описаннаго круга; тогда средина Ω прямой OH будетъ представлять центръ круга девяти точекъ, т. е. круга, проходящаго черезъ средины сторонъ тр-ка, черезъ подошвы высотъ его и



Фиг. 3.

черезъ средины отрѣзковъ AH, BH, CH; радіусъ этого круга будетъ равенъ половинѣ радіуса круга, описаннаго около ABC и слѣд., $\Omega A' = \Omega H' = \frac{1}{2} AO$; и такъ какъ кругъ девяти точекъ проходитъ черезъ средину K отрѣзка AH, то ΩK есть продолженіе ΩA′ и, какъ прямая, соединяющая средины HO и HA, будетъ параллельна AO.

Пусть, далѣе, OA′ встрѣчаетъ дугу BC описаннаго круга въ точкѣ L; тогда AL будетъ внутренній биссекторъ угла A даннаго тр-ка; продолживъ его на разстояніе Lω′, равное длинѣ LC=LB, мы найдемъ центръ ω′ внѣвписаннаго круга, касательнаго къ

сторонѣ BC *). Требуется доказать, что точка Цвойдзинскаго относительно прямой $O\omega'$ будетъ совпадать съ точкой прикосновенія круга ω' съ кругомъ Ω девяти точекъ.

Пусть $\Omega m'$ будетъ радіусъ этого послѣдняго круга, перпендикулярный къ BC. Найдемъ на его окружности соотвѣтствующее прямой $O\omega'$ положеніе точки Цвойдзинскаго m. Для этого, описавъ на OC, какъ на діаметрѣ, окружность и означивъ точку пересѣченія этой окружности съ прямою $O\omega'$ черезъ c, построимъ $\angle A'B'm = \angle A'B'c$; точка m пересѣченія стороны $B'm$ этого угла съ окружностью девяти точекъ и представитъ точку Цвойдзинскаго, соотвѣтствующую прямой $O\omega'$ (см. предыдущую теорему).

Докажемъ, во-первыхъ, что m лежитъ между точками A' и m'; для этого проведемъ Oc', параллельную биссектору $A\omega'$; найдемъ, что

$$\angle A'B'C' = \angle A'Oc' = \angle OLA = \angle OAL$$

и

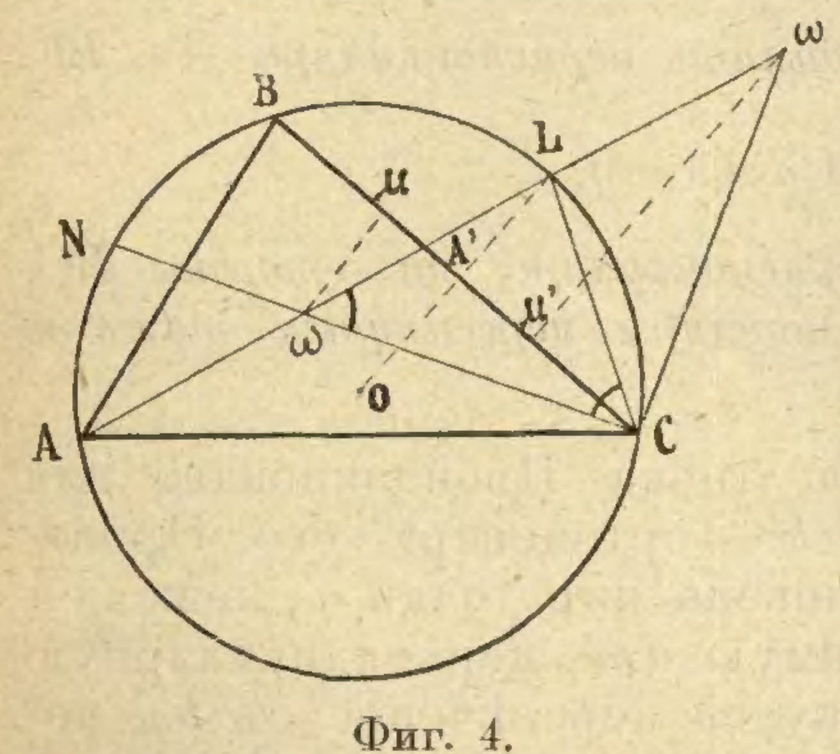
$$\angle A'B'm' = \frac{1}{2}\angle A'\Omega m' = \frac{1}{2}\angle OAH' = \angle OAL,$$

откуда заключаемъ, что $\angle A'B'm' = \angle A'B'c'$; но такъ какъ Oc лежитъ внутри угла LOc', то $\angle A'B'c$ меньше угла $A'B'c'$, а посему и $\angle A'B'm$ меньше угла $A'B'm'$ и, слѣд., m лежитъ между точками m' и A'.

Проведя теперь прямую $m'm$ и продолживъ ее до пересѣченія съ стороною BC въ точкѣ μ', докажемъ, что μ' будетъ совпадать съ точкой прикосновенія внѣвписаннаго круга ω' со стороной BC. Для этого замѣтимъ, что тр-къ $A'm'\mu'$ подобенъ тр-ку

---

*) Центръ ω' (см. фиг. 4) внѣвписаннаго круга, касательнаго къ сторонѣ BC, находится въ пересѣченіи внутренняго биссектора $A\omega'$ угла A тр-ка ABC съ внѣшнимъ биссекторомъ $C\omega'$ угла C того же тр-ка. Но если $C\omega$ будетъ внутренній биссекторъ угла C, то $C\omega$ перпендикулярна къ $C\omega'$; и такъ какъ $\angle C\omega L = \angle LC\omega$, какъ углы, имѣющіе одинаковую мѣру,—первый—полусумму дугъ CL и AN, а второй—полусумму равныхъ имъ дугъ BL и BN,—то заключаемъ, что L есть средина гипотенузы $\omega\omega'$ прямоугольнаго треугольника $\omega C\omega'$, и, слѣдовательно, $L\omega = L\omega' = LC$.



Фиг. 4.

Кромѣ того, изъ равенства $L\omega$ и $L\omega'$ слѣдуетъ, что и проекціи ихъ на BC равны; а посему, опустивъ $\omega\mu$ и $\omega'\mu'$ перпендикулярно къ BC, найдемъ, что $A'\mu = A'\mu'$, и, слѣдовательно, точки касанія μ и μ' вписаннаго и внѣвписаннаго круговъ со стороною BC равно удалены отъ средины A'. Какъ извѣстно $C\mu - B\mu = AC - AB$ и $C\mu' - B\mu' = AC - AB$; складывая же эти равенства, получаемъ: $\mu\mu' = AC - AB$, то $A'\mu = A'\mu' = \frac{1}{2}\mu\mu' = \frac{1}{2}(AC - AB)$.

$L O\omega'$, такъ какъ $\angle A'm'm = \angle A'O\omega'$ и $\angle m'A'H' (= \angle m'H'A') = \angle A'Oc' = \angle OLA$; а посему

$$\frac{LO}{A'm'} = \frac{L\omega'}{A'\mu'} \text{ или } \frac{\Omega m'}{A'm'} = \frac{L\omega'}{2A'\mu'}.$$

Съ другой же стороны, проведя BN перпендикулярно къ биссектору AL угла A тр-ка ABC до встрѣчи съ его стороной AC въ точкѣ N и соединивъ L съ N, найдемъ, что тр-къ LCN будетъ равнобедренный, такъ какъ въ немъ $LC = LB = LN$, и подобный съ равнобедреннымъ же тр-комъ $A'\Omega m'$, такъ какъ $\angle LCN = \frac{1}{2} \angle AOL = \frac{1}{2} \angle K\Omega m' = \angle \Omega A'm'$; а посему

$$\frac{\Omega m'}{A'm'} = \frac{LC}{NC} \text{ или } \frac{\Omega m'}{A'm'} = \frac{L\omega'}{NC}.$$

Сравнивая эту пропорцію съ предыдущею, заключаемъ, что $2A'\mu' = NC$ и, слѣд., $A'\mu' = \frac{1}{2} NC = \frac{1}{2}(AC - AB)$ и, слѣд., μ' есть точка касанія внѣвписаннаго круга ω' со стороной BC. (См. примѣчаніе на пред. страницѣ).

Изъ этого слѣдуетъ, что $\omega'\mu'$ будетъ радіусъ этого круга, перпендикулярный къ BC; а посему прямая $m'\mu'$, соединяющая концы двухъ параллельныхъ радіусовъ $\Omega m'$ и $\omega'\mu'$ двухъ соприкасающихся между собою круговъ Ω и ω', встрѣчаетъ окружность каждаго изъ этихъ круговъ въ точкѣ ихъ взаимнаго соприкосновенія; слѣд., точка m есть точка касанія круга ω' съ кругомъ Ω девяти точекъ.

Теорема I допускаетъ слѣдующее обобщеніе:

Теорема IV. *Если точки a', b', c' дѣлятъ перпендикуляры Aa, Bb, Cc такъ, что*

$$Aa' : Aa = Bb' : Bb = Cc' : Cc = q,$$

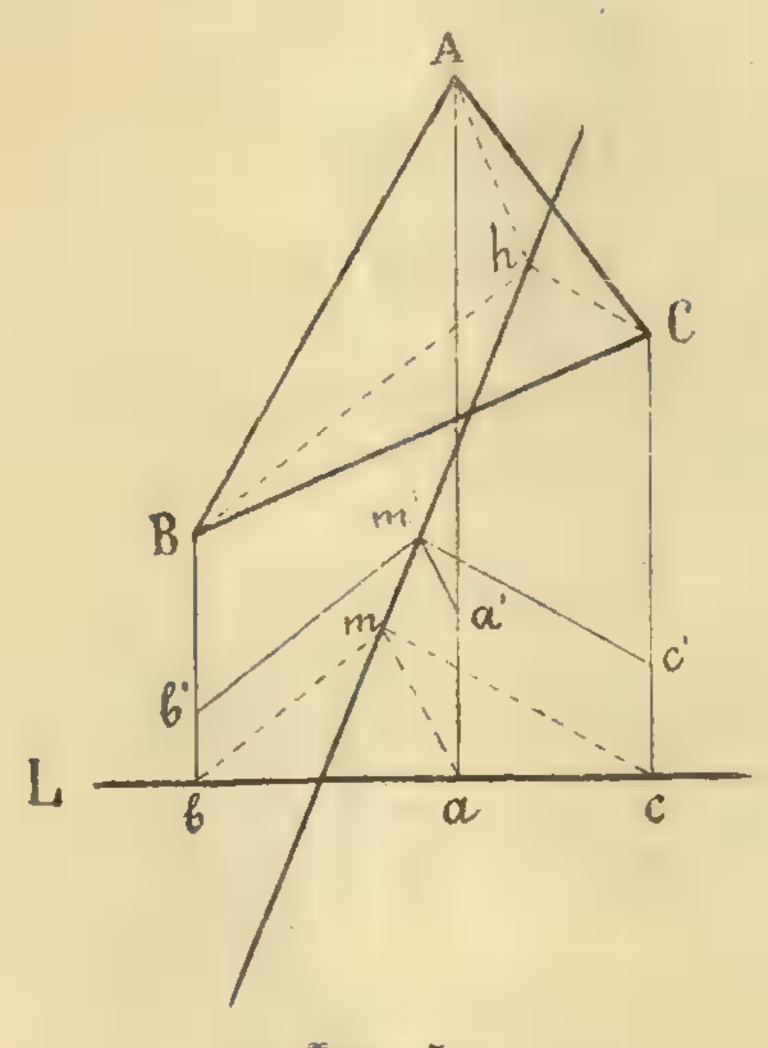
и если изъ точекъ a', b', c' опустимъ перпендикуляры на стороны BC, CA, AB треугольника, то эти перпендикуляры пересѣкутся тоже въ одной точкѣ (фиг. 5).

Дѣйствительно, пусть m будетъ точка Цвойдзинскаго для тр-ка ABC относительно прямой L, h — ортоцентръ его. Проведемъ черезъ h и m прямую hm и, проведя изъ точки a', лежащей гдѣ-либо на перпендикулярѣ Aa, прямую $a'm'$, перпендикулярную къ сторонѣ BC тр-ка, означимъ точку ея пересѣченія съ hm черезъ m'; тогда, вслѣдствіе параллельности линій Ah, $a'm'$ и am, будемъ имѣть:

$$hm' : hm = Aa' : Aa.$$

Но если затѣмъ соединимъ точку m' съ точками b' и c', взятыми соотвѣтственно на перпендикулярахъ Bb и Cc такимъ

образомъ, что $Bb':Bb=Cc':Cc=Aa':Aa$, то найдемъ, что $hm':hm=$ $=Bb':Bb$ и $hm':hm=Cc':Cc$; откуда слѣдуетъ, что $b'm' \| bm \| Bh$ и $c'm' \| Ch \| cm$, и слѣд., $m'b'$ перпендикулярна къ AC и $c'm'$, перпендику-



Фиг. 5.

лярна къ AB и, стало быть, перпендикуляры изъ точекъ a', b', c' на стороны тр-ка ABC пересѣкаются въ одной и той же точкѣ m'.

Условимся называть точку, подобную m', *точкой Цводзинскаго для тр-ка ABC, соотвѣтствующей отношенію q.*

Изъ предыдущаго слѣдуетъ также:

Теорема V. *Геометрическое мѣсто точекъ Цвойдзинскаго въ одномъ и томъ же тр-кѣ ABC, относительно одной и той же прямой L, точекъ, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ отношенія q, есть прямая линія.*

А именно, это есть прямая hm, проходящая черезъ точки h и m, изъ коихъ первая соотвѣтствуетъ значенію $q=0$, а вторая значенію $q=1$.

Мы условимся эту прямую называть *прямой Цводзинскаго для тр-ка ABC относительно данной прямой L.*

Пусть теперь (фиг. 6) A', B', C' будутъ точки пересѣченія сторонъ BC, CA и AB тр-ка ABC съ прямой L, и пусть прямая Цвойдзинскаго hm относительно этой прямой встрѣчаетъ перпендикуляръ Aa на прямую L въ точкѣ h'. Проведя $B'h'$ и $C'h'$ и означивъ ихъ пересѣченія съ перпендикулярами Bb и Cc на ту же прямую L черезъ b' и c', мы, вслѣдствіе параллельности Ah и am, будемъ имѣть: $hh':hm=Ah':Aa$. Но такъ какъ прямыя AB, $h'b'$ и ab проходятъ черезъ одну и ту же точку C', а прямыя AC,

$h'c'$ и ac черезъ точку B' и притомъ $Bb \| Aa \| Cc$, то

$$Ah':Aa = Bb':Bb$$

и

$$Ah':Aa = Cc':Cc,$$

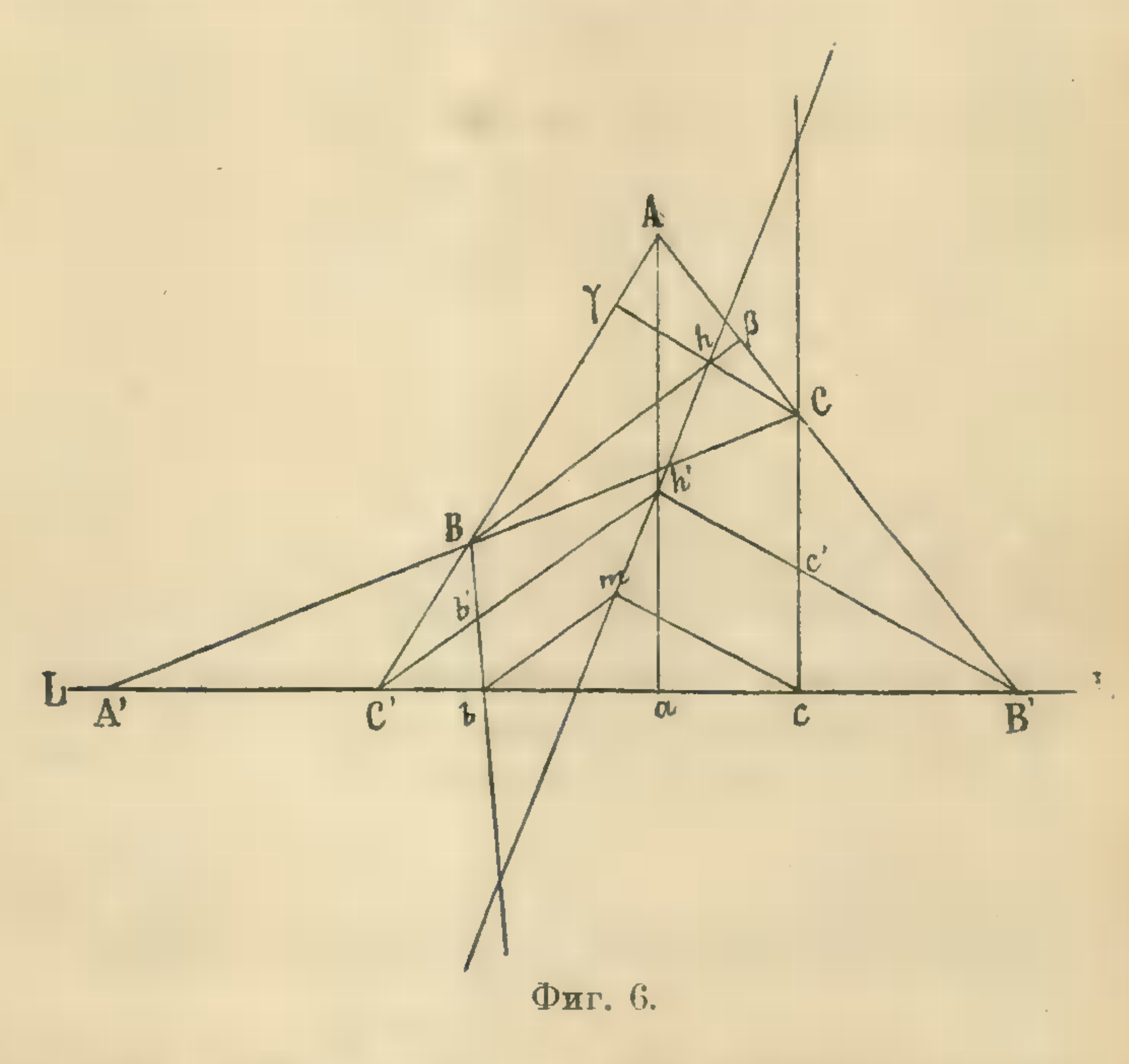
а посему

$$hh':hm = Bb':Bb$$

и

$$hh':hm = Cc':Cc,$$

откуда слѣдуетъ, что $b'h' \| Bh$ и $c'h' \| Ch$ и, слѣд., $C'h'$ перпендику-



Фиг. 6.

лярна къ AB' и $B'h'$, перпендикулярна къ AC', а, стало быть, h' есть ортоцентръ тр-ка $AB'C'$, образуемаго сторонами AB и AC даннаго треугольника съ прямою L. Итакъ, прямая Цвойдзинскаго для тр-ка ABC относительно прямой L, проходя черезъ ортоцентръ h этого тр-ка, проходитъ также и черезъ ортоцентръ тр-ка, образуемаго двумя какими-либо сторонами даннаго тр-ка съ прямою L.

Система четырехъ прямыхъ ABC', ACB', $A'BC$, $A'B'C'$, изъ коихъ никакія три не проходятъ черезъ одну и ту же точку, образуютъ такъ называемый полный четыреугольникъ; шесть точекъ пересѣченія этихъ прямыхъ, попарно взятыхъ, образуютъ вершины этого четыреугольника. Каждыя три изъ сторонъ его образуютъ тр-къ, которому отвѣчаетъ четвертая сторона его,

Такъ какъ прямая Цвойдзинскаго для какого-либо треугольника относительно всякой прямой, лежащей въ его плоскости, проходитъ черезъ ортоцентръ самого тр-ка, а равно также и черезъ ортоцентры каждаго изъ трехъ тр-ковъ, образуемыхъ данною прямого съ каждою парою сторонъ даннаго тр-ка, то заключаемъ:

Теорема VI. *Четыре треугольника полнаго четыреугольника имѣютъ каждый относительно четвертой стороны его одну и ту же прямую Цвойдзинскаго.* И

Теорема VII. *Ортоцентры четырехъ тр-ковъ полнаго четыреугольника лежатъ на одной и той же прямой* *).

„Силы природы на службѣ электротехники".

Докладъ на 74-омъ съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей и врачей въ Карлсбадѣ.

Рефератъ на эту тему былъ прочитанъ извѣстнымъ электротехникомъ O. v. Miller'омъ (Мюнхенъ) на происходившемъ отъ 22—27 сентября въ Карлсбадѣ съѣздѣ нѣмецкихъ естествоиспытателей. Въ этомъ рефератѣ сообщенъ былъ рядъ весьма интересныхъ для физика фактовъ объ успѣхахъ электротехники за послѣднее десятилѣтіе, которые мы и передаемъ здѣсь. Референтъ не затронулъ въ своемъ изложеніи вопросовъ *телефоніи* и *телеграфіи* и *электромедицины*, такъ какъ этимъ вопросамъ были посвящены особые доклады. Электрохиміи онъ посвятилъ только нѣсколько словъ.

---

*) Это свойство полнаго четыреугольника можетъ быть доказано совершенно независимо отъ существованія прямой Цвойдзинскаго.

Дѣйствительно, пусть h (фиг. 6) будетъ ортоцентръ треугольника ABC—одного изъ четырехъ тр-ковъ, образуемыхъ системою прямыхъ ABC', ACB', $A'BC$, $A'B'C'$. Проведя въ немъ высоты $B\beta$, $C\gamma$, найдемъ, что основанія ихъ β и γ лежатъ соотвѣтственно на окружностяхъ круговъ, описанныхъ на діагоналяхъ BB' и CC', какъ на діаметрахъ, ибо углы $B\beta B'$ и $C\gamma C'$ суть прямые; и такъ какъ, по свойству ортоцентра, $hB'.h\beta=hC'.h\gamma$, то, значитъ, степени точки h относительно этихъ круговъ равны между собою, и, слѣдовательно, h лежитъ на радикальной оси этихъ круговъ. Точно также убѣдимся, что и ортоцентры остальныхъ трехъ тр-ковъ лежатъ на радикальной оси тѣхъ же круговъ.

Вмѣсто пары круговъ, описанныхъ на діагоналяхъ BB' и CC', можно взять пару круговъ, описанныхъ на діагоналяхъ BB' и AA' или CC' и AA' и доказать такимъ же образомъ, что ортоцентры четырехъ тр-ковъ располагаются на радикальныхъ осяхъ каждой изъ этихъ двухъ паръ. Это служитъ косвеннымъ доказательствомъ того, что три круга, описанные на трехъ діагоналяхъ полнаго четыреугольника, какъ на діаметрахъ, имѣютъ общую радикальную ось.

Электрическое отопленіе примѣняется въ настоящее время для хозяйственныхъ цѣлей: для варенья, глаженья и т. п.; и цѣлый рядъ фабрикъ въ Западной Европѣ спеціально занимается изготовленіемъ аппаратовъ, служащихъ для этихъ цѣлей. Но и для промышленности электрическое отопленіе должно скоро получить большое значеніе: въ мѣстностяхъ, бѣдныхъ углемъ, выгоднѣе часто пользоваться естественной силой воды для полученія тока даже за 20 километровъ, чѣмъ сжигать дорогой горючій матеріалъ. Объясняется это тѣмъ, что электрическое отопленіе достигаетъ въ большихъ электрическихъ печахъ почти 100% полезнаго дѣйствія, тогда какъ въ обыкновенныхъ печахъ утилизируется только 20—50% тепла.

За послѣдніе десять лѣтъ въ области *электрическаго освѣщенія* замѣчается стремленіе найти наиболѣе экономный источникъ свѣта. Auer v. Welsbach, извѣстный изобрѣтеніемъ чулка для газовыхъ горѣлокъ, замѣнилъ угольную нить лампочки накаливанія нитью изъ тугоплавкаго *осмія*. Его изобрѣтеніе, правда, еще не можетъ быть примѣнено на практикѣ; за то известная лампа проф. Nernst'a уже давно примѣняется *). — Точно такъ же удалось усилить свѣтъ дуговыхъ лампъ, замѣнивъ свѣтящееся вещество другимъ. H. Bremer изобрѣлъ дуговую лампу, въ угли которой примѣшаны металлическія соли и которая даетъ при томъ же токѣ въ три раза больше свѣта, чѣмъ прежняя лампа.— Наконецъ, въ этой области достоинъ вниманія указанный Aron'омъ пріемъ, по которому въ особой лампѣ заставляютъ свѣтиться ртутные пары. Эта лампа весьма экономична, но пока свѣтъ ея обладаетъ непріятной для глазъ окраской. Можно надѣяться, что въ недалекомъ будущемъ электрическое освѣщеніе станетъ самымъ дешевымъ и наиболѣе гигіеничнымъ.

Электрическія желѣзныя дороги въ настоящее время не только вытѣснили почти совершенно конныя во всѣхъ большихъ городахъ Западной Европы и Сѣверной Америки, но даютъ возможность надѣяться на ихъ примѣненіе для сообщенія между отдѣльными городами. Фирмы Siemens & Halske и Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft произвели подобный опытъ между Берлиномъ и Цоссеномъ, при чемъ электрическіе вагоны двигались со скоростью 160 километровъ въ часъ. Но далеко не въ этой скорости главное преимущество электрическихъ желѣзныхъ дорогъ. Главное преимущество ихъ, во-первыхъ, въ абсолютной безопасности: токъ можно провести такъ, что онъ автоматически прерывается впереди и позади поѣзда, а слѣдовательно, столкновеніе является невозможнымъ; чтобы избѣжать возможности схода поѣзда съ рельсъ при быстромъ ходѣ на крутыхъ поворотахъ, можно примѣнять въ электрическихъ дорогахъ частями висячую систему.—Во-вторыхъ, значеніе этихъ дорогъ еще въ ихъ экономичности, особенно въ мѣстностяхъ, гдѣ имѣ-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физ.", № 284 (XXIV сем. № 8), стран. 187.

ются даровыя силы рѣкъ, водопадовъ и т. п. Въ настоящее время итальянскій парламентъ утвердилъ проэктъ постройки электрической желѣзной дороги между Римомъ и Неаполемъ (200 километровъ), а въ другихъ странахъ проэктируется постройка такихъ дорогъ между Берлиномъ и Гамбургомъ, Брюсселемъ и Антверпеномъ, Вѣной и Будапештомъ и т. д.

Но главное значеніе для дальнѣйшаго развитія электротехники и самаго широкаго примѣненія электричества имѣетъ найденный въ послѣдніе годы *способъ передачи электрической энергіи на большія разстоянія.* Около 20 лѣтъ тому назадъ французскій инженеръ Marcel Deprez опубликовалъ работу, въ которой было показано, что электрическая энергія можетъ передаваться по обыкновенной телеграфной проволокѣ на сколь-угодно большое разстояніе, если только выбрать достаточно большее напряженіе электричества; при этомъ можно достигнуть сколь-угодно большого процента полезнаго дѣйствія. Однако, на практикѣ его идея встрѣтила рядъ непреодолимыхъ препятствій, такъ какъ въ то время еще примѣнялся непрерывный токъ. Лишь съ изобрѣтеніемъ *трансформаторовъ*, давшихъ возможность увеличивать напряженіе перемѣнныхъ токовъ, даваемыхъ машинами, передача электричества на большія разстоянія могла быть практически осуществлена. Въ 1891-омъ году, по случаю выставки во Франкфуртѣ на Майнѣ, O. v. Miller'у удалось провести электричество на разстояніи 180 километровъ; при этомъ 2500 вольтъ напряженія дали возможность передать 200 лошадиныхъ силъ съ 75% полезнаго дѣйствія. Съ тѣхъ поръ этотъ пріемъ значительно усовершенствованъ, и мы въ состояніи передавать при посредствѣ напряженія въ 60000 вольтъ по свинцовымъ проволокамъ, толщиною въ карандашъ, энергію въ 10000 лошадиныхъ силъ; при чемъ на разстояніи 300 километровъ потеря не превышаетъ 15%.

На ряду съ этимъ за послѣдніе десять лѣтъ замѣчается огромный прогрессъ въ дѣлѣ *эксплоатаціи силъ природы.* Прежде всего электротехника воспользовалась *силой воды.* Упомянемъ о наиболѣе интересныхъ примѣрахъ этого рода: электрическій заводъ въ Тиволи снабжаетъ Римъ освѣщеніемъ и электрической энергіей; въ Америкѣ электрическимъ путемъ передается энергія отъ водопада Ніагары въ Буффало, а въ Санъ-Франциско получается изъ рѣки, находящейся на разстояніи 360 километровъ. Въ настоящее время въ Германіи и Австріи добывается такимъ путемъ изъ воды около 180,000 лошадиныхъ силъ; въ Швейцаріи около 160,000, по вычисленію проф. Wissling'a; въ Швеціи, по даннымъ проф. Arrhenius'a, до 200,000 лошадиныхъ силъ, а въ Сѣверо-Американскихъ Соединенныхъ Штатахъ около 400,000. Такъ что для всего міра можно считать, по крайней мѣрѣ, 2 милліона лошадиныхъ силъ. — Хотя это число и означаетъ весьма значительное завоеваніе за 10 лѣтъ, но оно совершенно незначительно по сравненію съ массой энергіи, которая пропадаетъ понапрасну. Проф. Arrhenius вычислилъ, что въ Швеціи рѣки,

водопады и т. д. могутъ дать два миллiона лошадиныхъ силъ; во Францiи можно считать годными для эксплуатацiи 10 миллiоновъ, и, по крайней мѣрѣ, по столько же въ Швейцарiи, Германiи, Австрiи, Италiи и т. д. Въ Сѣверной Америкѣ одинъ Нiагарскiй водопадъ въ состоянiи дать 10 миллiоновъ лошадиныхъ силъ.—Но не только сила воды можетъ примѣняться для добыванiя электрической энергiи. Напримѣръ, негодный уголь, транспортъ котораго является невыгоднымъ, можетъ быть примѣненъ на мѣстѣ для добычи электричества, которое въ состоянiи переносить энергiю безъ большихъ затратъ на большiя разстоянiя; этотъ прiемъ нашелъ себѣ уже примѣненiе въ угольныхъ копяхъ Верхней Силезiи, и подобное же проэктируется примѣнить въ Англiи. Далѣе, горячiе газы, которые теперь безполезно уходятъ въ атмосферу, могутъ быть примѣнены въ газовыхъ двигателяхъ для добыванiя электричества.

Но не слѣдуетъ думать, какъ это было много разъ высказано, что за столѣтiемъ пара послѣдуетъ вѣкъ электричества. Паровые двигатели даютъ въ настоящее время во всемъ мiрѣ отъ 60 до 80 миллiоновъ лошадиныхъ силъ, и поэтому электричество можетъ лишь стать на ряду съ паромъ, поддерживая, а не уничтожая его. Задача электротехники въ этомъ отношенiи состоитъ въ томъ, чтобы по возможности оттянуть эпоху недостатка въ углѣ, которая рано или поздно должна наступить и грозитъ опасностью уже черезъ нѣсколько вѣковъ нашей цивилизацiи. Поэтому необходимо использовать всѣ возможныя источники энергiи для добыванiя электричества.

П. Э.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Объ объемахъ многогранниковъ. Въ статьѣ г. Шатуновскаго „Объ измѣренiи объемовъ многогранниковъ“, помѣщенной въ №№ 316—319 „Вѣстника“, изложена принадлежащая автору теорiя объемовъ многогранниковъ, развитая аналогично теорiи площадей, предложенной г. Шатуновскимъ-же и Hilbert'омъ. Въ ноябрьской книжкѣ журнала „Bulletin of the American Mathematical Society“ имѣется сообщенiе, что профессоръ техасскаго университета G. B. Halsted, извѣстный своими изслѣдованiями по основанiямъ геометрiи, сдѣлалъ на съѣздѣ членовъ математической секцiи Американской Ученой Ассоцiацiи, происходившемъ отъ 28 iюня по 3 iюля н. с. текущаго года въ Питсбургѣ, сообщенiе „Новое изложенiе теорiи объемовъ“, вполнѣ совпадающее съ теорiей г. Шатуновскаго.

Астрономическія извѣстія.

4. **Статистика солнечныхъ пятенъ.** — Солнечныя пятна, до сихъ поръ необъяснимыя вполнѣ, представляютъ явленіе, интересующее весьма многихъ, какъ сами по себѣ, такъ и въ отношеніи связи, повидимому, существующей между этимъ явленіемъ и такими явленіями, какъ измѣненія земного магнитизма, сѣверныя сіянія и т. д. Интересно поэтому имѣть достаточно полныя и точныя статистическія данныя, касающіяся солнечныхъ пятенъ, за достаточно продолжительный промежутокъ времени. Собираніемъ такого матеріала занимался нынѣ покойный директоръ Цюрихской обсерваторіи Dr. Rudolf Wolf, собравшій наблюденія надъ солнечными пятнами за время съ 1610 года. Изучая измѣренія площадей пятенъ, произведенныя въ Римѣ и Мадридѣ, R. Wolf замѣтилъ, что пятнопроизводительная дѣятельность Солнца пропорціональна биному $10g+f$, гдѣ g есть число группъ пятенъ, а f число пятенъ, видимыхъ въ данный моментъ на Солнцѣ; поэтому пятнопроизводительная дѣятельность Солнца можетъ быть характеризуема числомъ r, если положить

$$r = k(10g + f),$$

гдѣ k есть коэффиціентъ, численная величина котораго зависитъ отъ наблюдателя и отъ инструмента, при помощи котораго производятся наблюденія, и опредѣляемаго изъ сравненій одновременныхъ наблюденій, произведенныхъ различными наблюдателями; понятно также, что для какого-либо наблюдателя этотъ коэффиціентъ слѣдуетъ принять равнымъ единицѣ. Числа эти r носятъ названіе „относительныхъ чиселъ". Продолжателемъ работы R. Wolf'a является нынѣ его преемникъ по обсерваторіи проф. A. Wolfer, обрабатывающій по указанному способу какъ свои собственныя наблюденія, такъ и наблюденія другихъ лицъ надъ солнечными пятнами и публикующій ихъ ежегодно въ „Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich", подъ заглавіемъ „Astronomische Mitteilungen, gegründet von Dr. Rudolf Wolf".

Въ послѣднемъ отчетѣ (за 1901 годъ) проф. Wolfer помѣстилъ сдѣланную имъ переработку всѣхъ наблюденій, собранныхъ R. Wolf'омъ и имъ самимъ, по 1901 годъ включительно. Результатомъ этой переработки являются таблицы, дающія среднія величины r для каждаго мѣсяца съ 1749 по 1901 годъ, а также таблица, дающая эпохи maximum'овъ и minimum'овъ солнечныхъ пятенъ за время съ 1610 по 1901 годъ. Изъ этихъ таблицъ приведемъ только нижеслѣдующія данныя:

Minima.		Maxima.		Продолжительность періода.	
Эпоха.	Вѣсъ.	Эпоха.	Вѣсъ.	Отъ min. до max.	Отъ max. до min.
1610.8	5	1615.5	2	4.7	3.5
1619.0	1	1626.0	5	7.0	8.0
1634.0	2	1639.5	2	5.5	5 5
1645.0	5	1649.0	1	4.0	6.0
1655.0	1	1660 0	1	5.0	6.0
1666.0	2	1675.0	2	9.0	4.5
1679.5	2	1685.0	2	5.5	4.5
1689.5	2	1693.0	1	3.5	5.0
1698.0	1	1705.5	4	7.5	6.5
1712.0	3	1718.2	6	6.2	5.3
1723.5	2	1727.5	4	4.0	6.5
1734.0	2	1738.7	2	4.7	6.3
1745.0	2	1750.3	7	5.3	4.9
1755.2	9	1761.5	7	6.3	5.0
1766.5	5	1769.7	8	3.2	5.8
1775.5	7	1778.4	5	2.9	6.3
1784.7	4	1788.1	4	3.4	10.2
1798.3	9	1805.2	5	6.9	5.4
1810.6	8	1816.4	8	5.8	6.9
1823.3	10	1829.9	10	6.6	4.0
1833.9	10	1837.2	10	3.3	6.3
1843.5	10	1848.1	10	4.6	7.9
1856.0	10	1860.1	10	4.1	7.1
1867.2	10	1870.6	10	3.4	8.3
1878.9	10	1883.9	10	5.0	5.7
1889.6	10	1894.1	10	4.5	—

Обработка этихъ чиселъ, въ смыслѣ опредѣленія продолжительности періода между maximum'ами или minimum'ами, дала слѣдующіе результаты:

Средняя эпоха minimum'а	$1744.21 \pm 0^{a}.30$
„ „ maximum'а	$1749.37 \pm 0\ .43.$
Промежутокъ времени между двумя послѣдовательными minimum'ами .	$11^{a}.141 \pm 0^{a}.036$
То же, между maximum'ами	$11\ .091 \pm 0\ .053$
Среднее	$11\ .124 \pm 0\ .030.$
Промежутокъ времени отъ minimum'а до слѣдующаго maximum'а . . .	$5^{a}.16.$
То же, отъ maximum'а до minimum'а .	$5\ .96.$

Такимъ образомъ, эпохи minimum'овъ E_1 и эпохи maximum'овъ E_2 могутъ быть вычислены по формуламъ

$$E_1 = 1744.21 + 11.141.n$$

$$E_2 = 1749.37 + 11.091.n,$$

если давать n значенія 0, 1, 2, 3, ... Полученныя изъ этихъ формулъ эпохи, конечно, не будутъ вполнѣ совпадать съ наблюденными, отклоняясь отъ нихъ въ ту или другую сторону, при чемъ отклоненія эти достигаютъ иногда даже 5,6 лѣтъ. Чѣмъ объяснить такія отклоненія,—вопросъ до сихъ поръ открытый: Dr. Wolf предполагалъ существованіе въ явленіи солнечныхъ пятенъ нѣкоторыхъ иныхъ, дополнительныхъ (кромѣ 11-лѣтняго) періодовъ, но открыть таковые ему не удалось.

5. **Періодическія кометы.**—Въ нынѣшнемъ 1902 году ожидается появленіе двухъ періодическихъ кометъ. Первая изъ нихъ—комета Tempel-Swift'а. Исторія ея вкратцѣ такова: 27 ноября (н. с.) 1869 г. она была открыта астрономомъ Tempel'емъ (въ Марселѣ), при чемъ періодъ обращенія ея вокругъ Солнца былъ опредѣленъ приблизительно въ 5.5 лѣтъ; тѣмъ не менѣе, въ 1875 году, при первомъ послѣ открытія приближеніи къ Солнцу, комета найдена не была, — причиной чего слѣдуетъ считать неблагопріятное для наблюденій положеніе ея. Въ 1880 году (11 августа) комета эта была вновь открыта Swift'омъ. При слѣдующихъ прохожденіяхъ кометы вблизи Солнца въ 1886 и 1897 годахъ ея положенія были неблагопріятны для наблюденій; въ 1891 году она была видна (впервые 27 сентября Barnard'омъ). Теперь ожидать комету нужно въ ноябрѣ; но, во всякомъ случаѣ, наблюдать ее можно будетъ, по всей вѣроятности, лишь при помощи инструментовъ; по крайней мѣрѣ, въ 1891 году она имѣла видъ неясно ограниченной туманности около 2′ въ діаметрѣ, со слабымъ хвостомъ, приблизительно въ 5′—8′.

Вторая ожидаемая комета была открыта въ 1895 году (20 августа н. ст.) также Swift'омъ. Періодъ ея обращенія около Солнца приблизительно 7 лѣтъ. Черезъ перигелій она должна пройти въ серединѣ ноября, когда и будетъ находиться въ наиболѣе благопріятныхъ для наблюденій условіяхъ.

6. **Средняя плотность земли и гравитаціонная постоянная.**—Въ послѣдней, октябрьской книжкѣ журнала „Popular Astronomy" помѣщена интересная статья G. K. Burgess дающая сводъ всѣхъ имѣющихся по этому предмету наблюденій. Напомнимъ, что гравитаціонная постоянная есть не что иное, какъ коэффиціентъ k пропорціональности въ формулѣ, выражающей Ньютоновъ законъ притяженія: $f = k \cdot \frac{m.m_1}{r^2}$,—коэффиціентъ, численная величина котораго зависитъ отъ единицъ, коими измѣряются массы m и m_1 и разстояніе r. Если назвать среднюю плотность земли Δ, уско-

реніе силы тяжести на поверхности земли, принимаемой за шаръ радіуса R, черезъ g, то $\Delta = \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{k.R}$; эта формула даетъ связь между среднею плотностью земли Δ и гравитаціонною постоянною k. Распредѣляя всѣ имѣющіяся опредѣленія средней плотности земли, сообразно методамъ наблюденій, G. K. Burgess получаетъ слѣдующія величины.

Астрономическіе и геодезическіе методы (отклоненіе отвѣсной линіи, маятникъ и т. п. [1]) $\Delta = 5.60 \pm 0.13$

Маятникъ Вилзинга [2]) . . . . $\Delta = 5.5579 \pm 0.018$

Химическіе вѣсы [3]) . . . . $\Delta = 5.507 \pm 0.014$

Крутильные вѣсы [4]) . . . . $\Delta = 5.5243 \pm 0.0009$.

Приписывая этимъ среднимъ вѣса, соотвѣтственно вѣроятнымъ ошибкамъ (а именно 0, 1, 2 и 300), Burgess находитъ для Δ и для гравитаціонной постоянной слѣдующія значенія:

$$\Delta = 5.5247 \pm 0.0013,$$

$$k = 666.07 \times 10^{-10} \pm 0.16 \times 10^{-10} \frac{cm^3}{gr.sec^2};$$

приписывая же послѣднему среднему вѣсъ 3 (вмѣсто 300), онъ получаетъ $\Delta = 5.5241$, — величина почти тождественная съ выше указанной.

В. А. Е.

РЕЦЕНЗІИ.

А. А. Трусевичъ. *Классные опыты по физикѣ.* Краткое руководство для преподавателей. Варшава 1901 г.

На университетскихъ диспутахъ, когда оппоненты въ благодушномъ настроеніи, диспутанту ставятъ обыкновенно въ вину то, что онъ не написалъ лучше, не продолжилъ своихъ изслѣдованій дальше. То же можно сказать и автору разсматриваемой книжки: молодые преподаватели найдутъ въ ней не мало новаго и для нихъ интереснаго, но почти все это изложено, несмотря на видимое стараніе автора, слишкомъ поверхностно, какъ въ популярныхъ книжкахъ и въ школьныхъ учебникахъ. Въ описаніи опыта, который читатель долженъ самъ продѣлать, надо указать на всѣ

[1]) Наблюденія Maskelyne и Hutton (1771 г.), Carlini (1824), Airy (1855), James и Clarke (1855), Pechmann (1865), Mendenhall (1880), Sterneck (1883—85), Preston (1887—92).

[2]) Наблюденія самого Wilsing'a (1889 г.).

[3]) Наблюденія Jolly (1881 г.), Poynting (1891), Richarz и Krigar-Menzel (1891).

[4]) Наблюденія Cavendish (1798 г.), Reich (1837), Baily (1852), Cornu и Baille (1878), Boys (1895), Braun (1896), Eötvös (1896).

условія успѣха, иначе читатель долженъ будетъ найти ихъ путемъ собственнаго, часто „горькаго“ опыта, и книга будетъ служить ему лишь указателемъ темы для собственной работы. Такъ цѣлесообразно писать жрецамъ науки для профановъ, чтобы не утруждать ихъ вниманіе мелочами и не выдавать тайны своихъ успѣховъ, но передъ своими собратьями по наукѣ скрытничать неумѣстно.

Въ книгѣ описано не мало опытовъ и приборовъ, повидимому, оригинальныхъ, въ этихъ-то случаяхъ указаны и многіе пріемы, необходимые для успѣха. Въ другихъ же мѣстахъ, какъ напр. § 10 (атвудова машина) сообщенныя свѣдѣнія или общеизвѣстны или недостаточны. Многіе рисунки, повидимому, оригинальны, но представляютъ часто каррикатуры приборовъ, съ искаженными пропорціями. Таковъ, напр., чертежъ 7 стр. 4, изображающій очень ясно какъ-бы конструкторскій разрѣзъ блока, который, однако, сталъ бы плохо вертѣться, если-бы выполнить его по размѣрамъ чертежа.

Серьезныхъ промаховъ и ошибокъ я не замѣтилъ; мелкіе, конечно, найдутся, какъ во всякомъ дѣлѣ рукъ человѣческихъ. Такъ, напримѣръ, на стр. 3 авторъ напрасно полагаетъ, что тѣло, подвѣшенное на пружинѣ, „свободно“. Его движенія все-таки ограничены условіемъ, что точка привѣса пружины и точка привѣса тѣла къ ней находятся на одной прямой, хотя и въ перемѣнномъ разстояніи. На стр. 62 указанъ составъ для паянія оловомъ, но вмѣсто хлористаго цинка написано хлористое олово; я нарочно попробовалъ его, полагая, что, можетъ быть, это новый способъ, но съ хлористымъ оловомъ припай не растекается, а съ прибавкою нашатыря, который дѣйствуетъ и одинъ, растекается, но хуже, чѣмъ съ обыкновеннымъ составомъ изъ хлористаго цинка и нашатыря.

Прив.-Доц. В. Лермантовъ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 256 (4 сер.). Если въ треугольникѣ ABC

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{2},$$

то прямая, соединяющая ортоцентръ съ центромъ описанной окружности, параллельна сторонѣ BC.

М. Попруженко (Кіевъ).

№ 257 (4 сер.). Даны прямыя AB, CD, MN и точка E на послѣдней прямой. На прямыхъ AB и CD найти по точкѣ X и Y такъ, чтобы разность угловъ MEX и MEY, а также произведеніе $EX.EY$ были данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 258 (4 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$150x^2-60a\sqrt{x}+54-5a^2=0.$$

Н. Готлибъ (Митава).

№ 259 (4 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$\sqrt{(x+1)(x^2+3)-12}+\sqrt{(x+1)(x^2-1)-7}=11.$$

Г. Огановъ (Эривань).

№ 260 (4 сер.). Доказать, что трехчленъ

$$x^{3a+2}+x^{3b+1}+x^{3c},$$

гдѣ a, b, c цѣлыя положительныя числа, дѣлится безъ остатка на x^2+x+1.

(Заимств.).

№ 261 (4 сер.). Доказать, что лучи—падающій на призму и выходящій изъ нея—равно отстоятъ отъ точки пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ въ точкахъ паденія и выхожденія лучей.

М. Гербановскій (Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 181 (4 сер.). *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе:*

$$\frac{x}{2}=2^{\frac{x}{y}}.$$

Корень цѣлой степени m можетъ быть извлеченъ изъ цѣлаго числа точно, какъ извѣстно, только тогда, если показатели различныхъ простыхъ чиселъ, входящихъ въ разложеніе A, кратны m. По условію

$$2^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{2^x}=\frac{x}{2},$$

гдѣ x—число цѣлое; т. е. изъ 2^x извлекается корень степени y. Основываясь на приведенной выше истинѣ, можно утверждать, что x кратно y. Итакъ,

$$\frac{x}{y}=n \qquad (1),$$

гдѣ n число цѣлое, положительное.

По условію (см. (1)),

$$\frac{x}{2}=2^{\frac{x}{y}}=2^n,$$

откуда

$$x=2^{n+1} \qquad (2),$$

(см. (1), (2))

$$y=\frac{x}{n}=\frac{2^{n+1}}{n} \qquad (3).$$

Такъ какъ y есть число цѣлое, то n есть дѣлитель числа 2^{n+1}, т. е. $n=2^k$, гдѣ k число цѣлое, не отрицательное.

Поэтому (см. (1), (3)):

$$x = 2^{2^k+1}, \; y = 2^{2^k-k+1}. \qquad (4).$$

Такъ какъ—при $k \geqslant 0$ $2^k \geqslant 1+(2-1)k$ (это общеизвѣстное неравенство—при k цѣломъ и не отрицательномъ, — какъ это имѣетъ мѣсто въ задачѣ, — легко получить изъ бинома

$$[1+(2-1)]^k = 1+k(2-1)+\frac{k(k-1)}{1.2}(2-1)^2+\cdots=2^k), \text{ т. е.}$$

$2^k \geqslant 1+k$ *), то при всякомъ неотрицательномъ цѣломъ k формулы (4) даютъ годныя рѣшенія; такимъ образомъ, *всѣ* рѣшенія заключены въ формулахъ (4).

И. Плотникъ (Одесса); *Г. Огановъ* (Эривань); *Я. Гукайло* (село Тальное); *Н. Готлибъ* (Митава).

№ 205 (4 сер.). *Найти minimum периметра треугольника, въ которомъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, имѣетъ данную длину a.*

Пусть AB, AC—катеты, $AD=a$—перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла A на гипотенузу BC, α — острый уголъ ABC. Изъ равенствъ $AB=\frac{a}{\sin\alpha}$, $AC=\frac{a}{\cos\alpha}$, $CD=a\operatorname{tg}\alpha$, $DB=a\operatorname{ctg}\alpha$, находимъ, что периметръ треугольника равенъ

$$a\left(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\right)=a\left(\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\right) \qquad (1).$$

Замѣчая, что

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{90^0-\alpha}{2},$$

преобразуемъ выраженіе (1) къ виду:

$$a\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{90^0-\alpha}{2}\right)=$$

$$=a.\frac{\sin\frac{90^0}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{90^0-\alpha}{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{90^0-\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos\frac{90^0}{2}\right]}=$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{\cos\frac{90^0-2\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad (2).$$

Знаменатель выраженія (2) остается для всякаго прямоугольнаго треугольника положительнымъ **), вслѣдствіе геометрическаго значенія выраженія 2.

---

*) Знакъ равенства въ этой формулѣ относится лишь къ случаю $k=0$.

**) Предоставляемъ читателю оправдать это утвержденіе еще и на основаніи тригонометрическихъ соображеній.

Поэтому $\cos\frac{90^0-2\alpha}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, такъ что minimum выраженія (2) наступаетъ при maximum'ѣ выраженія $\cos\frac{90^0-2\alpha}{2}$; а этотъ maximum равенъ 1 и наступаетъ онъ (принимая во вниманіе, что $\alpha<90^0$) при $90^0-2\alpha=0$, $\alpha=45^0$, т. е. при условіи, что прямоугольный треугольникъ становится равнобедреннымъ.

Въ этомъ случаѣ выраженіе (2), а слѣдовательно, и равное ему выраженіе (1) обращается въ

$$\frac{a\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2a\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=a\sqrt{2}(2+\sqrt{2})=$$

$$=a(2\sqrt{2}+2)=2a(1+\sqrt{2}).$$

Н. С. (Одесса); *Г. Огановъ* (сел. Гомадзоръ).

№ 208 (4 сер.). *Въ произведеніи*

$$1.2.3....(n-1)n(n+$$

вычеркиваютъ всѣми возможными способами два сосѣднихъ сомножителя и перемножаютъ сомножителей, остающихся каждый разъ послѣ вычеркиванія. Доказать, что сумма всѣхъ составленныхъ такимъ образомъ произведеній менѣе произведенія

$$1.2.3....(n-1)n(n+1).$$

Пусть k и $k+1$—два сосѣднихъ вычеркнутыхъ сомножителя; тогда произведеніе оставшихся сомножителей равно $\frac{1.2.3\,....\,(n-1)n(n+1)}{k(k+1)}$, а сумма всѣхъ составленныхъ такимъ образомъ сомножителей равна

$$1.2.3....(n-1)n(n+1)\cdot\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=1.2.3....(n-1)n(n-1)\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=1.2.3....(n-1)n(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.2.3....(n-1)n(n+1)-1.2.3....(n-1).n,$$

что менѣе $1.2.3....(n-1)n(n+1)$.

Г. Огановъ (Гомадзоръ); *Л. Ямпольскій* (Одесса).

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 30-го Октября 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.